Preparación Olimpiada Matemática Española

DESIGUALDADES

14/01/2021

Ejercicio 1 (Calentamiento)**.** Prueba, sabiendo que las variables son reales positivas:

$$(x^2+2) \geq 2\sqrt{x^2+1}.$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

$$\frac{a+b+c}{abc} \geq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n, \text{ con } \lambda_1+\cdots+\lambda_n=1.$$

Ejercicio 2 (Desigualdad de Nesbitt)**.** Prueba, para a, b, c reales positivos,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Ejercicio 3 (Fase local OME 2017)**.** Encontrar todas las soluciones enteras positivas de

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b+c-2}=1.$$

Ejercicio 4 (Fase local OME 2019)**.** Prueba que para todo $a, b, c > 0$ se cumple que

$$\frac{a^2}{b^3c}-\frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b}-\frac{c^2}{a}.$$

¿En qué caso se cumple la igualdad?

Ejercicio 5 (Fase nacional OME 2017, P5)**.** Determina el máximo valor posible de la expresión

$$27abc+a\sqrt{a^2+2bc}+b\sqrt{b^2+2ca}+c\sqrt{c^2+2ab},$$

siendo a, b, c números reales tales que $a+b+c=1/\sqrt{3}$.

Ejercicio 6 (Fase nacional OME 2021, P4)**.** Sean a, b, c, d números reales tales que

$$a+b+c+d=0, \quad a^2+b^2+c^2+d^2=12.$$

Halla el valor máximo y mínimo que puede tomar $abcd$, y determina para qué valores de a, b, c, d se alcanzan.

Ejercicio 7 (IMO 2014, P1)**.** Let $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ be an infinite sequence of positive integers. Prove that there exists a unique integer $n \geq 1$ such that

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Ejercicio 8 (IMO 2000, P2)**.** Let a, b, c be positive real numbers so that $abc = 1$. Prove that

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Ejercicio 9 (USAMO 2009, P4)**.** For $n \geq 2$ let $a_1, a_2, \ldots a_n$ be positive real numbers such that

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Prove that $\text{máx}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq 4\,\text{mín}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Ejercicio 10 (USAMO 2011, P1)**.** Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$. Prove that

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geq 3.$$